

パズルで解こう因数分解

三川 一夫 (東京)

0. ポケットから出てきたもの

今回四次元ポケットから出てきたのは前回同様タイルです。

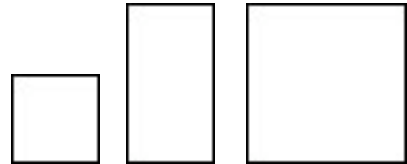
1. 文字式の計算はベキタイルが一番

右のような

たて1よこ1の正方形の「1タイル」と、

たてxよこ1の長方形の「xタイル」と、

たてxよこxの正方形の「 x^2 タイル」を使います。

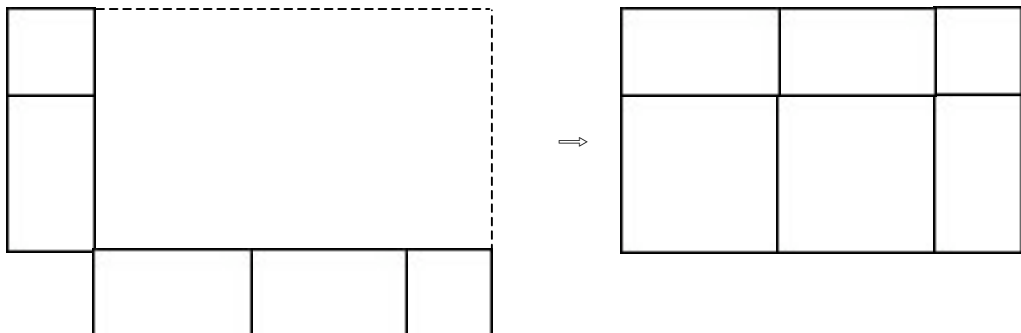


まず、たて $(x+1)$ よこ $(2x+1)$ の長方形の面積を考えます。

タイルを使ってたてとよこの長さを作ります。たてにxタイル1枚と1タイル

1枚をたてに並べます。よこにxタイル2枚と1タイル1枚をよこに並べます。

したがってつぎの図のようになります。



この図の点線の部分の面積を求めることになります。

ここにタイルをぴったり入るように入れます。いろいろな並べかたがあります

が、並べ直すと結局右のようになることがわかります。

そこで、それぞれのタイルの数を求めると「 x^2 タイル」は $1 \times 2 = 2$ 枚「 x タイル」は $1 \times 1 + 1 \times 2 = 3$ 枚、「 1 タイル」は $1 \times 1 = 1$ 枚になります。

したがって、 $(x + 1)(2x + 1) = 2x^2 + 3x + 1$ となります。

2. キャンセルの原理

前回同様、裏をマイナスのタイルとし、斜線をつけて区別します。

右のような

たて -1 よこ 1 の正方形の「 -1 タイル」と、
たて $-x$ よこ 1 の長方形の「 $-x$ タイル」と、
たて $-x$ よこ x の正方形の「 $-x^2$ タイル」を
使います。



$$x^2 + (-x^2) = 0$$



$$x + (-x) = 0$$



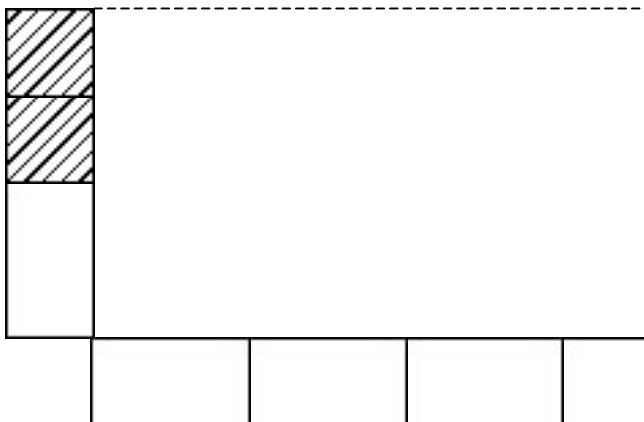
$$1 + (-1) = 0$$



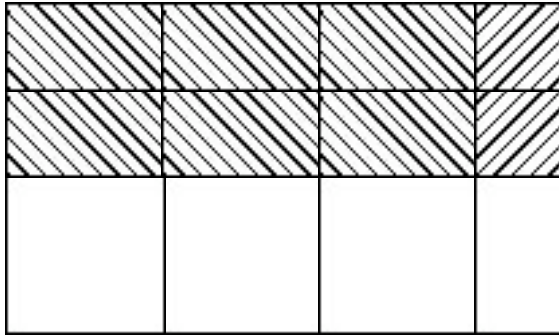
をキャンセルの原理といいます。

つぎに、たて $(x-2)$ よこ $(3x+1)$ の長方形の面積を考えます。

タイルを使ってたてとよこの長さを作ります。たてに x タイル1枚と裏にした
 1 タイル2枚をたてに並べます。よこに x タイル3枚と 1 タイル1枚をよこに
並べます。したがってつぎの図のようになります



この図の点線の部分の面積
を求めることになります。
ここにタイルをぴったり入
るように入れます。いろい
ろな並べかたがありますが、
並べ直すと結局次のように
なることがわかります。

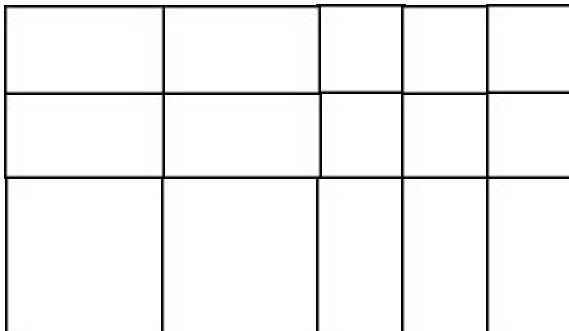


そこで、それぞれのタイルの数を求めると「 x^2 タイル」は $1 \times 3 = 3$ 枚、「 x タイル」は $1 \times 1 = 1$ 枚、「 $-x$ タイル」は $2 \times 3 = 6$ 枚、「 -1 タイル」は $2 \times 1 = 2$ 枚になります。

したがって、 $(x-2)(3x+1) = 3x^2 - 5x - 2$ となります。

3. パズルで解く因数分解

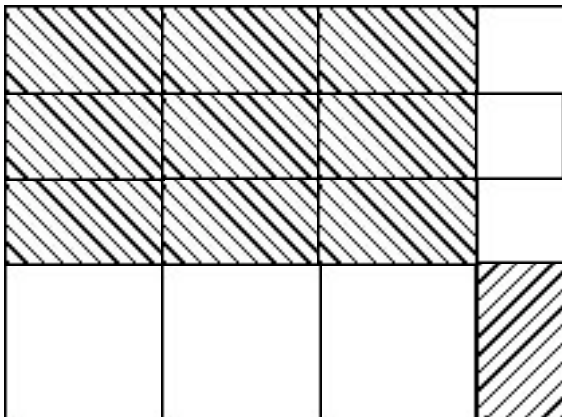
つぎに、 $2x^2 + 7x + 6$ 、つまり、「 x^2 タイル」を2枚、「 x タイル」を7枚、「 1 タイルを」6枚用意し、全部を使って長方形1つを作ってください。いろいろな並べ方があるが、並びかえるといずれもつぎのようになります。



つまり、たてが $(x+2)$ よこが $(2x+3)$ となります。

よって、 $2x^2 + 7x + 6 = (x+2)(2x+3)$ となります。これを「因数分解」といいます。

つぎに、 $3x^2 - 10x + 3$ のタイルを全部使って長方形1つ作ってください。



いろいろな並べ方があるが、並びかえるといずれもつぎのようになります。つまり、たてが $(x-3)$ よこが $(3x-1)$ となります。

よって、 $3x^2 - 10x + 3 = (x-3)(3x-1)$ となります。

4. 忍法田の字

今までの並べ方についてまとめると

③ x タイル	② 1 タイル
① x ² タイル	③ x タイル

- ①左下に「x²タイル」を長方形に並べる
 - ②右上に「1タイル」を長方形に並べる
 - ③左上右下に「xタイル」を分けて並べる
- 田の字に並ぶので、これを「忍法田の字」と言います。

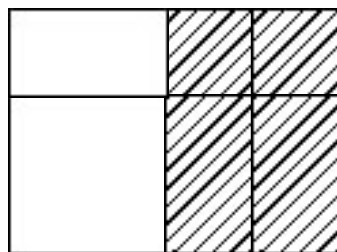
つぎは、 $x^2 - x - 2$ を長方形に並べて下さい。これは、難しいです。

「忍法田の字」を使って並べてみましょう。

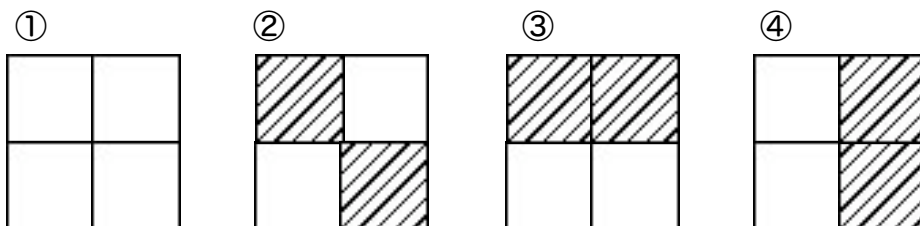
まず左下に「x²タイル」を並べます。右上に「1タイル」を並べます。



残りの点線には「xタイル」は3枚必要になります。しかし、「xタイル」は1枚しかありません。ですから、キャンセルタイルとして「xタイル」と「-xタイル」を追加すれば「xタイル」は3枚となり、つぎのように並べることができます。



たては $(x+1)$ よこは $(x-2)$ の長方形ですので、 $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ となります。結局「田の字の」並び方は、つぎのような4つの場合があります。そして③④の1タイルがマイナスのとき、キャンセルタイルが使われることがわかります。



中学では、 x^2 の係数が1の場合しか扱いませんが、やはり一般の場合から特殊へ指導し、「たすきがけ法」の考えをこのパズルで身につけさせたいです。